

数 学

(120分)

数学Ⅰ, 数学Ⅱ, 数学Ⅲ, 数学A, 数学B

2023年2月25日

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は6ページあります。
試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合には、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答用紙は4枚です。解答はすべて解答用紙の所定の場所に、途中経過も含めて記入しなさい。解答用紙は裏面も使用できます。
- 4 受験番号は、すべての解答用紙の所定の欄(2か所)に必ず記入しなさい。
- 5 試験終了後は、解答用紙の上にある白ぬきの番号の順に並べなさい。
- 6 配付した解答用紙は持ち出してはいけません。
- 7 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

このページは空白である。

第1問 (100点)

問1 2023と1547の最大公約数を求めよ。

問2 3点A(1, 0, -2), B(2, 1, 1), C(3, 1, 2)の定める平面ABC上に点P(u, u, 0)があるとき, uの値を求めよ。

問3 次の不定積分, 定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{1}{2x^2 + x - 1} dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos^2 x dx$$

問4 $x \neq 0$ で定義された関数 $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ の導関数 $f'(x)$ を求め, $y = f'(x)$ のグラフをかけ。

第2問 (100点)

問1 数列 $\{a_n\}$ が等式

$$\sum_{k=1}^n k(2k+1)(2k+3)a_k = n(n+1) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たしているとする。また、数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = n(2n+1)(2n+3)a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

- (1) a_1, a_2, b_1, b_2 を求めよ。
- (2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

問2 m を自然数とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $m^3 - m$ は3の倍数であることを示せ。
- (2) $m^5 - m$ は5の倍数であることを示せ。

第3問 (100点)

関数 $f(x) = x(\log x)^2 - 3x$ ($x > 0$) について、次の問いに答えよ。

問1 関数 $f(x)$ の増減、極値と、曲線 $y = f(x)$ の変曲点、凹凸を調べよ。

問2 不等式 $f(x) \leq -2x$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

問3 (1) 不定積分 $\int x \log x dx$ を求めよ。

(2) 問2で求めた x の範囲において、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = -2x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

第4問 (100点)

2つのレポートの異なる度合い（非類似度）を数値化することは、レポートの独創性を評価するために重要である。レポートのテーマに関する異なる9個の単語を選び、それらの単語の集合を $U = \{w_1, w_2, \dots, w_9\}$ とする。レポートAに、 U に属する単語が含まれるかどうかを調べたところ、 w_2, w_3, w_5 が含まれていた。このとき、単語の集合Aを

$$A = \{w_2, w_3, w_5\}$$

と表す。同様に、レポートBについても調べたところ、単語の集合Bが $A \cap B = \{w_5\}$, $\overline{A \cup B} = \{w_1, w_4, w_9\}$ を満たしたとする。次の問いに答えよ。

問1 集合Bを求めよ。

問2 集合Aの部分集合をすべて求めよ。

問3 集合Uの部分集合の個数を求めよ。

問4 集合Uの部分集合X, Yについて、集合

$$Z = (X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap Y)$$

の要素の個数 $n(Z)$ を、 $n(X)$, $n(Y)$, $n(X \cap Y)$ を用いて表せ。

ここで、Uの部分集合X, Yに対して、XとYの非類似度 $d(X, Y)$ を次の式で定義する。

$$d(X, Y) = \frac{n((X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap Y))}{n(X \cup Y)}$$

問5 集合A, Bに対して、AとBの非類似度 $d(A, B)$ を計算せよ。

問6 C, DをUの部分集合とする。 $n(C) = 4$, $n(D) = 6$ のとき、CとDの非類似度 $d(C, D)$ がとりうる値の最大値と最小値を求めよ。